[2] 論理式の双対性

定義 1.5（双対） ある論理式 L において，

$$\cdot \Leftrightarrow +$$

という論理演算記号の入れ替え，および，

$$0 \Leftrightarrow 1$$

という論理定数の入れ替え，とによってできる論理式を L の**双対**(そうつい)という．本書では，L と双対な論理式を L^d と表記する．

例 題

1.4 論理式 $L = (\overline{1 \cdot \overline{Y}}) + (0 + (\overline{X} \cdot Z))$ と双対な論理式を求めなさい．

［解］ 定義 1.5 にしたがって論理演算記号と論理定数とを入れ替えると，

$$L^d = (\overline{0 + \overline{Y}}) \cdot (1 \cdot (\overline{X} + Z))$$

となる．

注意 「双対」では，NOT（演算記号は“$\overline{}$”），カッコ（ ）による演算順位，および等号（“=”）や不等号（“≠”）については，何も言及していないので，そのまま残る．したがって，NOT の範囲や論理演算の優先順位も NOT や元の演算記号（AND と OR）が持っていた順位がそのまま受け継がれる．双対な論理式を求めるときは，① 暗黙のうちに省略したカッコを復活させる；② 双対を求める；③ 求めた双対から冗長で不要なカッコを省く；という手順によると，間違わない．

[3] 双対性

ある論理式 L が成立しているとき，それと双対となる論理式 L^d も成立することを「**双対性**がある」という．

基本論理演算によって構成する論理式は，次のような重要な性質を持っている．

定理 1.1（双対性） 論理式 P, Q において $P = Q$ である（P と Q が同値である，恒等(こうとう)である）ならば，$P^d = Q^d$ である（P^d と Q^d が同値である）．

証明 論理代数の基礎である公理 1.1〜1.10 のうち，NOT の 1.1 と 1.2，および，AND と OR の 1.3 と 1.10，1.4 と 1.9，1.5 と 1.8，1.6 と 1.7，のそれ

ぞれは双対性がある．したがって，これらの公理にしたがう論理式 L が成立すれば，同じ公理にしたがう（L と双対な）論理式 L^d も成立する．

定理 1.1 で $Q=1\,(0)$ とすれば，定理 1.1 は「$P=1\,(0)$ ならば，$P^d=0\,(1)$ である」となる．

注意　定理 1.1（双対性）は「双対な論理式どうしが同値である（$P=P^d$ あるいは $Q=Q^d$）」を示していない．双対な論理式どうしが等しい場合については，定義 1.7（18ページ）で述べる．

論理代数では，ある論理式 L を定義すればそれと双対な論理式 L^d が必ず存在する．したがって，論理代数における定理のほとんどは対として示せ，また，その証明はいずれか一方だけに対して行えばよい．

1.2.4　種々の基本定理

ここで公理 1.1〜1.10 と定理 1.1（双対性）にしたがういくつかの基本定理を与える．

[1]　1 変数論理関数の定理

定理 1.2　論理変数 X の値とは無関係に，それと “0” との AND は “0”，“1” との OR は “1” である．

$$X \cdot 0 = 0 \tag{1.11}$$

$$X + 1 = 1 \tag{1.12}$$

証明　式 1.11において，X は “0” あるいは “1” のいずれかである．それらを代入すると，$0 \cdot 0 = 0$ あるいは $1 \cdot 0 = 0$ である．これらは公理そのものである．また，定理 1.1（双対性）によって，式 1.11と双対な式 1.12も成立する．

注意　論理変数は “0” か “1” の 2 値のいずれかであるから，変数が少ない定理の証明では，前述したように，変数に “0” と “1” の定数を代入して行えばよい．たとえば，1 変数ならたった 2 通り，2 変数なら 4（$=2^2$）通り，の各場合について示せばよい．以下に掲げる定理のほとんども，この方法で証明できるので，特に難しい証明以外は省略する．

注意　以下では，特に紛れがある場合を除いて，ある定理と双対な定理の証明は省

$\overline{X_i}$ を入れ替え，演算記号の ·（AND）と +（OR）を入れ替えて，

$$\overline{L} = f\left(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_n}, X_n, +, \cdot\right)$$

と形式的に表せる．このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & f\left(X_1, \overline{X_1}, X_2, \overline{X_2}, \ldots, X_n, \overline{X_n}, \cdot, +\right) \\ & \quad = \overline{f\left(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_n}, X_n, +, \cdot\right)} \end{aligned} \tag{1.38}$$

証明　2 変数から始めて，数学的帰納法によって n 変数に拡張する．（省略）

定義 1.6（双対関数）　ド・モルガンの定理（定理 1.16）における n 変数論理関数 f に対して，すべての変数の否定（NOT）をとり，かつ，論理関数全体に NOT を施して得る n 変数論理関数を**双対関数**という．本書では，f の双対関数を f^d と表記する．すなわち，形式的には，

$$f^d = \overline{f\left(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_n}, X_n, \cdot, +\right)}$$

と表せる．

ここで，ド・モルガンの定理（定理 1.16）の式 1.38によって，

$$\begin{aligned} f^d &= \overline{f\left(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_n}, X_n, \cdot, +\right)} \\ &= f\left(X_1, \overline{X_1}, X_2, \overline{X_2}, \ldots, X_n, \overline{X_n}, +, \cdot\right) \end{aligned}$$

である．これを f と比較すると，「論理関数 f の**双対関数** f^d は，f の AND($\cdot$) と OR($+$) を入れ替えて得る」ことが分かる．

注意　厳密には，双対関数を得る操作では，定義 1.5（11 ページ）による双対な論理式を得る操作と同じく，論理演算記号の AND(“·”) と OR(“+”) の入れ替えの外に，論理定数の “0” と “1” の入れ替えも適用する．双対を得るこれらの操作では，論理変数の否定はとらない点がド・モルガンの定理と異なる．

定義 1.7（自己双対関数）　n 変数論理関数 f とその双対関数 f^d が同値である（等しい）とき，すなわち，

$$f = f^d$$

ならば，f を**自己双対関数**という．